

Devoir surveillé 2

Consignes

- Cette épreuve contient **4 questions** équipondérées (durée : **1 h**)
- Calculatrice autorisée.
- Prière d'expliciter vos solutions et raisonnements.

Rappel de trigonométrie

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

Exercice 1

Croissance exponentielle : une colonie de bactéries occupant 1 % de la surface d'une boîte de Petri à 8h ce matin en occupe maintenant (à 14h) 18 %.

- a) À quel moment la surface de la boîte de Petri sera-t-elle couverte de bactéries ?

17h33

- b) De façon générale, quel est le temps nécessaire pour que la population de bactéries double de taille ?

1h26

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin 2x = \sin x$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos x = \sin x$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{17\pi}{18} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Beaucoup plus dur que je ne le croyais, désolé!

Exercice 3

Exprimer chacune des fonctions suivantes sous la forme $A \cos(\omega t + \phi)$.

a) $\sin 2t$

$$\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

b) $\cos t + \sin t$

$$\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $3 \sin 2x + 4 \cos 2x$

$$5 \cos(2x - \phi), \text{ où } \phi = \arctan \frac{3}{4} \approx 0,644$$

d) $\cos^2(3t)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6t) \dots$$

Exercice 4

Exprimer chacun des nombres complexes z suivants sous la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $z = \frac{(2+i)(1-i)}{1+i}$

$$1 - 2i$$

b) z tel que $z^2 = -8$

$$z = \pm 2\sqrt{2}i$$

c) z tel que $z^2 = -i$

$$z = \pm e^{-\frac{\pi}{4}i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

d) z tel que $z^2 + 2z + 3 = 0$

$$z = -1 \pm \sqrt{2}i$$